Université Hassan 1er
Faculté des Sciences et Techniques
Département de Maths et Informatique
Settat

Contrôle d'Analyse II

02 h 00 min

Documents non autorisés

Tout document est interdit. Calculatrice, téléphone portable, ordinateur, tablette, etc. sont aussi interdits !
Qualité de la rédaction : de 0 à 2 points (Apporter le plus grand soin à la rédaction et justifier toute réponse !).

Exercice 1 [4 pt]
On s'intéresse à l'équation différentielle :

$$(\mathrm{E}): \qquad (1+x^2)^2 y'' + 2x(1+x^2) y' + y = \sqrt{1+x^2}.$$

1. Soit y solution de cette équation différentielle. En effectuant le changement de variable $x = \tan(t)$, montrer que l'on peut se ramener à une équation différentielle à coefficients constants.
2. Donner, en utilisant la méthode de la variation de la constante, toutes les solutions réelles de cette équation différentielle.

Exercice 2 [4 pts]

1. Rappeler d'abord les hypothèses du *théorème d'Abel* pour les séries, ensuite montrer que la série numérique $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{\ln\left(n^{\cos n}\right)}{\sqrt{n}}\right)$, les vérifie.
2. Étudier, en utilisant la *règle de comparaison d'une série avec une intégrale*, la nature de la série numérique $\sum_{n\geq 1}\left(a^{\sqrt{n}}\right)$, avec $0 < a < 1$.

Exercice 3 [10 pts]

1. Soient $a < b$ deux réels et $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que si f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$, alors $\lim_{n\to+\infty} \int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = 0$.
2. Montrer que l'application f définie sur $\left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ par $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x}$ se prolonge en une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
3. Montrer, en utilisant le *théorème d'Abel*, que l'intégrale impropre $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ converge.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$, on pose $\mathcal{I}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{\sin x}\,dx$ et $\mathcal{K}_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx$. Calculer d'abord $\mathcal{I}_0$, ensuite $\mathcal{I}_n$ et enfin, montrer que $\lim_{n\to+\infty} \mathcal{K}_n = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.
5. Déduire de ce qui précède que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$.

Eléments de Correction

Analyse II

2015 — 2016

Ahmed Bouhami
Département de Maths et Info
UH1 - FST - Settat

Exercice :

1/ $\forall y \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R},\mathbb{R})$, on définit la fct $z :]-\pi/2,\pi/2[\to \mathbb{R}$ par $z(t) = y(\tan(t))$ et $x = \tan t$. La fct z est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-\pi/2,\pi/2[$ (avec $z'(t) = (\tan t)' y'(\tan t) = (1+\tan^2(t)) y'(\tan t)$ et $z''(t) = (1+\tan^2(t))^2 y''(\tan t) + 2\tan(t)\cdot(1+\tan^2 t)\cdot y'(\tan t)$.

Comme la fct $t \mapsto \tan t$ réalise une bijection de $]-\pi/2,\pi/2[$ sur $\mathbb{R}$, la fct y est solution sur $\mathbb{R}$ de l'éq (E) ssi la fct z est sol sur $]-\pi/2,\pi/2[$ de l'éq : $z''(t) = (1+x^2)^2 y''(x) + 2x(1+x^2) y'(x) = -y(x) + \sqrt{1+x^2}$

$$= -z(t) + \sqrt{1+\tan^2(t)} = -z(t) + \frac{1}{\cos t}$$

i.e. $$\boxed{z''(t) + z(t) = \frac{1}{\cos t},\quad t \in]-\pi/2,\pi/2[} \quad (**)$$

2/ Résolvons l'éq (**) via la méthode de variation de la cte :

⊛ Eq. sans 2nd membre : $z'' + z = 0$ (Eq. cara $\lambda^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = i$ et $\lambda_2 = -i$)

$\Rightarrow z_h = C_1 \cos(t) + C_2 \sin(t)$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

⊛ Variation de la cte : On cherche des sol de la forme $z(t) = C_1(t)\cos(t) + C_2(t)\sin(t)$. z est sol de (**) ssi C_1 et C_2 sont sols du système $\begin{cases} C_1'(t)\cos(t) + C_2'\sin(t) = 0 \\ C_1'(t)\sin(t) + C_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t} \end{cases}$

Le déterminant du système est non nul, donc ce sys admet une sol unique

- $C_1'(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} 0 & \sin t \\ 1/\cos t & \cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = -\tan t \Rightarrow C_1(t) = \ln|\cos t| + cte$.

et $C_2'(t) = \dfrac{\begin{vmatrix} \cos t & 0 \\ -\sin t & 1/\cos t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{vmatrix}} = 1 \Rightarrow C_2(t) = t + cte$.

- La sol générale de (**) est de la forme :

$$\boxed{z(t) = (\ln|\cos t| + \alpha)\cos t + (t+\beta)\sin t,\ \alpha,\beta \in \mathbb{R}},\quad |\cos t| = \cos t \text{ sur }]-\pi/2,\pi/2[$$

Ce qui donne pour $y(x) = z(\arctan x)$

$$y(x) = (\ln(\cos(\arctan(x))) + \alpha)\cos(\arctan x) + (\arctan x + \beta)\sin(\arctan x)$$

En tenant compte de : $\sin t = \cos t \cdot \tan t = \dfrac{\tan t}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

et $\cos t = \dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2 t}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ avec $x = \tan(t)$, $t \in]-\pi/2,\pi/2[$

Exercice :

1°/ Une intégration par parties nous donne pour tout $n \geq 1$:

$$\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx = \int_a^b f(x)\cdot\left(-\frac{\cos nx}{n}\right)'dx = \left[-f(x)\frac{\cos(nx)}{n}\right]_a^b + \int_a^b f'(x)\cdot\frac{\cos nx}{n}\,dx$$

f et f' sont continues sur le segment "fermé borné" $[a,b]$, elles atteignent leurs bornes sup. On en déduit que :

$$\left|\int_a^b f(x)\sin(nx)\,dx\right| \leq \frac{2}{n}\sup_{[a,b]}|f(x)| + \frac{(b-a)}{n}\sup_{[a,b]}|f'(x)| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

2°/ Un D.L au V_0 de $f(x) = \frac{1}{x} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x\sin x} = \frac{-x^3/6 + o_0(x^3)}{1 - x^2/6 + o_0(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} 0$

ce qui permet de prolonger f par continuité en 0 en posant $f(0) = 0$.

On a alors $\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{f(x)}{x} = \frac{-1/6 + o_0(x)}{1 - x^2/6 + o_0(x^2)} \xrightarrow[x\to 0]{} -1/6 \Rightarrow f$ est dérivable en 0 et $f'(0) = -1/6$. Par ailleurs f est de classe C^1 sur $]0, \pi/2]$ avec :

$$f'(x) = \frac{x^2\cos x - \sin^2 x}{x^2\sin^2 x} = \frac{x^2\left(1 - \frac{x^2}{2} + o_0(x^3)\right) - \left(x - \frac{x^3}{6} + o_0(x^4)\right)^2}{x^2\left(x - x^3/6 + o_0(x^4)\right)} = \frac{-1/6 + o_0(x)}{1 + o_0(x)} \xrightarrow[x\to 0]{} -1/6$$

$\Rightarrow f'$ est continue en 0. En définitive, f se prolonge en une fct de C^1 sur $[0, \pi/2]$

3°/ Fixons un pt $c \in]0, +\infty[$, par exemple $c = 1$ et étudions la nature de $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ et $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$. La fct $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ se prolonge par continuité en 0 avec $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$. L'intégrale $\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,dx$ est donc CV. Comme $x \mapsto 1/x$ est décroissante et tend vers 0 en $+\infty$ et $\forall t > 1$, $\left|\int_1^t \sin x\,dx\right| = |1 - \cos t| \leq 2$ alors d'après Abel, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ est CV. Par conséquent $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ CV.

4°/ Avec $\sin((2n+1)x) = \sin(2nx)\cos(x) + \cos(2nx)\sin x$ et

$2\sin(2nx)\cos(x) = \sin((2n+1)x) + \sin((2n-1)x)$, on déduit que pour $n \geq 1$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}\cos x\,dx + \int_0^{\pi/2}\cos(2nx)\,dx = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin 2nx}{\sin x}\cos x\,dx.$$ Et

$I_n + I_{n-1} = 2\cdot\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(2nx)}{\sin x}\cos(x)\,dx = 2I_n$, soit $I_n = I_{n-1}$ et par récurrence

$I_n = I_0 = \pi/2$ pour tout $n \geq 0$.

On sait déjà que $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$ existe. Le chgt de var $t = (2n+1)x$ nous donne :

$$K_n = \int_0^{\pi/2}\frac{\sin((2n+1)x)}{x}\,dx = \int_0^{(2n+1)\pi/2}\frac{\sin t}{t}\,dt \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx$$

5°/ En remarquant que : $K_n = \int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)x)\left[f(x) + \frac{1}{\sin x}\right]dx = I_n + \int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)x)f(x)\,dx = 0$ (d'après 2°/ et 4°/)

$\int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)x)f(x)\,dx$ avec $\lim_{n\to+\infty}$

et $I_n = \pi/2$. On déduit que :

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,dx = \pi/2.$$

$$y'(x) = \left(\alpha - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \left(\arctan x + \beta\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{\alpha + \beta x + x\arctan x - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Exercice :

1°/ On considère une série de terme général u_n tq $\forall n \in \mathbb{N}$, u_n avec $(A_n)_n$ tq $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée et $(b_n)_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et (b_n) est $\downarrow$, $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Soit $n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln(n^{\cos n})}{\sqrt{n}} = \cos(n) \cdot \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = a_n \cdot b_n$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(k) = \mathrm{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) = \mathrm{Re}\left(e^{i} \cdot \frac{e^{in}-1}{e^{i}-1}\right)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right| \leq |e^{i}| \cdot \frac{|e^{in}-1|}{|e^{i}-1|} \leq \frac{2}{|e^{i}-1|} \quad (\text{car } |e^{i}| = 1) \Rightarrow \forall n \geq 1$$

bornée.

Soit $x \geq 1$, on pose $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et f est continue, dérivable $]1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot 1/x - (1/2\sqrt{x}) \cdot \ln(x)}{x} = \frac{1/\sqrt{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{1}{2x\sqrt{x}}(2 - \ln($

$f'(x)$ est positive sur $[1, e^2]$ et négative sur $]e^2, +\infty[$ et $f'(e^2) = 0$

f est $\uparrow$ sur $[1, e^2]$, admet un max en e^2 qui vaut $f(e^2) = \frac{2\ln e}{\sqrt{e^2}}$

$\downarrow$ sur $]e^2, +\infty[$ avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc $(b_n)_n = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)_n$ positive, $\downarrow$

du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_0 > e^2$ et $(b_n)_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Donc $\sum u_n$ cv

2°/ On considère l'app. $f : [1, +\infty[\to \mathbb{R}_+$, $x \mapsto a^{\sqrt{x}}$. f est et décroissante et positive.

Soit $n > 1$, $\int_1^n a^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{n}} 2s\,a^{s}\,ds = \int_1^{\sqrt{n}} 2s\,e^{s\ln(a)}\,ds = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{s\ln a}}{\ln a}\right.$

$$= \left[\frac{2s\,e^{s\ln a}}{\ln a}\right]_1^{\sqrt{n}} - \int_1^{\sqrt{n}} 2\,\frac{e^{s\ln a}}{\ln a}\,ds = \frac{2\sqrt{n}}{\ln a}\,e^{\sqrt{n}\ln a} - \frac{2}{\ln a}\,e^{\ln a} - \frac{2}{(\ln a)^2}\left(e\right.$$

$$= \frac{2\sqrt{n} \cdot a^{\sqrt{n}}}{\ln a} - \frac{2a}{\ln a} - \frac{2}{(\ln a)^2}\left(a^{\sqrt{n}} - a\right) \quad \text{car } a \in]0,1[,\ \lim_{+\infty} a^{\sqrt{n}} = \ldots$$

et $\lim_{n \to +\infty} \int_1^n a^{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot \frac{a}{\ln a}\left(\frac{1}{\ln a} - 1\right) \in \mathbb{R}$ et $\int_1^{+\infty} a^{\sqrt{x}}\,dx$

par conséquent, $\sum_{n \geq 1} a^{\sqrt{n}}$ est cv.

$$f(x) = \left(\alpha - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)\right)\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + \left(\arctan x + \beta\right)\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$\boxed{y(x) = \frac{\alpha + \beta x + x\arctan x - \ln\left(\sqrt{1+x^2}\right)}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}}$$

Exercice :

1/ On considère une série de terme général u_n tq $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = a_n \cdot b_n$ avec $(A_n)_n$ tq $A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ est bornée et $(b_n)_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$ et (b_n) est $\downarrow$, alors $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge.

Soit $n \geq 1$, $u_n = \frac{\ln(n^{\cos(n)})}{\sqrt{n}} = \cos(n) \cdot \frac{\ln(n)}{\sqrt{n}} = a_n \cdot b_n$.

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} \cos(k) = \operatorname{Re}\left(\sum_{k=1}^{n} e^{ik}\right) = \operatorname{Re}\left(e^{i} \cdot \frac{e^{in}-1}{e^{i}-1}\right)$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos(k)\right| \leq |e^{i}| \cdot \frac{|e^{in}-1|}{|e^{i}-1|} \leq \frac{2}{|e^{i}-1|} \quad (\text{car } |e^{in}| = 1) \Rightarrow \forall n \geq 1, \left(\sum_{k=1}^{n} \cos k\right)$$

est bornée.

Soit $x \geq 1$, on pose $f(x) = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ et g est continue, dérivable sur $[1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{\sqrt{x} \cdot \frac{1}{x} - (\ln x) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \ln(x)}{2x\sqrt{x}}$.

$f'(x)$ est positive sur $[1, e^2]$ et négative sur $]e^2, +\infty[$ et $f'(e^2) = 0 \Rightarrow$ f est $\uparrow$ sur $[1, e^2]$, admet un max en e^2 qui vaut $f(e^2) = \frac{2\ln e}{\sqrt{e^2}} = \frac{2}{e}$ et $\downarrow$ sur $]e^2, +\infty[$ avec $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Donc $(b_n)_n = \left(\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)_n$ positive, $\downarrow$ à partir du rang $n_0 \in \mathbb{N}$ tq $n_0 \geq e^2$ et $(b_n)_n \xrightarrow[+\infty]{} 0$. Donc $\sum u_n$ cv.

2/ On considère l'app $f : [1, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, $x \longmapsto a^{\sqrt{x}}$ f est continue et décroissante et positive.

Soit $n \geq 1$, $\int_1^n a^{\sqrt{x}}\,dx = \int_1^{\sqrt{n}} 2s\, a^{s}\,ds = \int_1^{\sqrt{n}} 2s\, e^{s\ln(a)}\,ds = \int_1^{\sqrt{n}} \left(\frac{e^{s\ln a}}{\ln a}\right)' \cdot 2s\,ds$

$$= \left[\frac{2se^{s\ln a}}{\ln a}\right]_1^{\sqrt{n}} - \int_1^{\sqrt{n}} 2\frac{e^{s\ln a}}{\ln a}\,ds = \frac{2\sqrt{n}}{a} e^{\sqrt{n}\ln a} - \frac{2}{\ln a} e^{\ln a} - \frac{2}{(\ln a)^2}\left(e^{\sqrt{n}\ln a} - e^{\ln a}\right)$$

$$= \frac{2\sqrt{n} \cdot a^{\sqrt{n}}}{\ln a} - \frac{2a}{\ln a} - \frac{2}{(\ln a)^2}\left(a^{\sqrt{n}} - a\right). \quad \text{Or } a \in]0,1[, \lim_{+\infty} a^{\sqrt{n}} = \lim_{+\infty} \sqrt{n}\, a^{\sqrt{n}} = 0$$

et $\lim_{n \to +\infty} \int_1^n a^{\sqrt{x}}\,dx = 2 \cdot \frac{a}{\ln a}\left(\frac{1}{\ln a} - 1\right) \in \mathbb{R}$ et $\int_1^{+\infty} a^{\sqrt{x}}\,dx$ cv et par conséquent, $\sum_{n \geq 1} a^{\sqrt{n}}$ et cv.